

## **MEJORAMIENTO EN EL AJUSTE ORBITAL DE SATELITES GPS**

**A. Meza<sup>1,2</sup>, J.C. Usandivaras<sup>1</sup> and C. Brunini<sup>1</sup>**

<sup>1</sup> Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas, La Plata.

<sup>2</sup> Comisión Nacional de Investigación Científicas y Tecnológicas.

### **ABSTRACT**

En the lastest years, GPS has showed up to be a powerful tool in both scientific and technological aspects. Most of its applications require the highest precision of the system and to achieve it we must enhance our knowledge of the satellite orbits. In this work we describe the classical methos of orbital fit and we analyse the different accelerations that take part in it, showing that the actual accuracy is constrained by the solar radiation pressure effect: this fact is confirmed by the analysis of the residuals or our fit. We discuss the actual methods and propose a new treatment of the problem. In order to reach this stage we studied SPR and we develop the necessary formulae through a detailed analysis of the geometry of the problem.

### **RESUMEN**

En los últimos años el sistema GPS se ha impuesto como herramienta tanto en trabajos científicos como tecnológicos. Muchas de las aplicaciones demandan de la máxima precisión del sistema y para lograrla debemos mejorar las órbitas satelitales. En el trabajo describimos el método clásico de ajuste orbital y analizamos las componentes de aceleraciones intervinientes, mostrando que la precisión actual se ve limitada por el efecto de presión de radiación solar (P.R.S.); hecho que confirmamos con el análisis de los residuos de nuestro ajuste. Discutimos los métodos actuales en uso y proponemos un nuevo tratamiento. Para poder llegar a esta ultima etapa abordamos el fenómeno de la P.R.S. y desarrollamos las fórmulas necesarias a través de un detallado análisis de la geometría del problema.

### **1. INTRODUCCION**

El sistema G.P.S. (Global Position System) es hoy en día la herramienta de posicionamiento mas potente y muy probablemente será la empleada en los próximos tiempos. Su valiosa utilidad está relacionada con la alta precisión con que trabaja el sistema y esta a su vez depende de la precisión con que se conocen las órbitas de los satélites. Para realizar el cálculo preciso es necesario un modelo completo de fuerzas que actúan sobre el satélite. Teniendo en cuenta el tipo de satélite que integran el

sistema G.P.S., de órbitas casi circulares y a aproximadamente 20200 km. sobre la tierra, las fuerzas intervinientes serán: la atracción gravitatoria de la tierra (que nos bastará debido a su altura con unos pocos armónicos esféricos), la atracción gravitatoria del sol y de la luna, la presión de radiación solar (P.R.S.) y en menor magnitud términos relativistas.

De las fuerzas consideradas la presión de radiación solar no encuentra todavía un modelo satisfactorio y debido a su falta de resolución no se puede realizar aún un análisis detallado de las que actúan con menor magnitud. La posición del satélite se obtiene integrando numéricamente las ecuaciones de movimiento. El software de cálculo y ajuste orbital utilizado fue desarrollado en la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas de la U.N.L.P. (Perdomo y del Cogliano, 1992). El programa básicamente evalúa las fuerzas involucradas en el ajuste a partir de las condiciones iniciales (coordenadas y velocidad para una época determinada) y de los parámetros que aparecen en el modelo de fuerzas, luego avanza un paso de integración evaluando coordenadas y velocidades para un tiempo posterior (integración numérica); el proceso se reitera hasta obtener una serie de posiciones y velocidades calculadas a lo largo del período requerido. Las posiciones calculadas junto con las posiciones observadas nos dan las diferencias  $O - C$  que se minimizan utilizando por ejemplo el método de mínimos cuadrados.

Teniendo en cuenta que la presión de radiación solar fija el límite de la precisión con que se pueden calcular en la actualidad las efemérides satelitarias es entonces el objetivo de este trabajo mejorar la resolución de dicho efecto sobre las órbitas G.P.S.

## **2. ANALISIS DE LOS METODOS EMPLEADOS PARA EL CALCULO DEL EFECTO DE LA PRESION DE RADIACION SOLAR.**

### **2.1. Modelo numérico**

Según Fliegel et al. (1985) la aceleración debida al efecto directo de la presión de radiación solar consta de dos componentes, la componente principal  $d\vec{a}_1$  que está en la dirección opuesta al sol y otra componente  $d\vec{a}_2$  más pequeña que actúa a lo largo del eje  $\vec{e}_2$  del satélite (eje ortogonal al vector que apunta en la dirección opuesta al sol y al de las antenas, el cual está dirigido nominalmente hacia el centro de la tierra).

La componente principal es usualmente modelada por:

$$d\vec{a}_1 = vk \rho_s^2 \frac{\vec{\rho} - \vec{\rho}_s}{|\vec{\rho} - \vec{\rho}_s|^3}$$

donde  $\rho$  es la posición geocéntrica del satélite y  $\rho_s$  es la posición geocéntrica del sol;  $v$  depende linealmente de la constante de radiación solar  $\Phi$ , de un factor  $C_r$  que define las propiedades de reflectividad del satélite y de la relación masa área efectiva del satélite:  $k$  es un factor de eclipse el cual vale cero cuando el satélite está en el cono de sombra de la tierra y vale uno cuando el satélite está iluminado por el sol; para la penumbra  $k$  tiene un valor entre cero y uno. El modelado es extremadamente difícil ya que el factor  $\Phi$  varía impredeciblemente a lo largo del año y un único valor de  $C_r$  no es adecuado para el satélite, también se tiene que si bien la masa es bien conocida, la forma irregular del satélite no nos permite una determinación exacta de la relación masa área efectiva. La componente  $d\vec{a}_2$  llamada y-bias, es causada principalmente por una combinación del desalineamiento de los paneles solares y de la radiación térmica a lo largo del eje  $\vec{e}_2$ ; esta componente puede permanecer constante por varias semanas y es dos órdenes de magnitud mas pequeña que el término principal.

Por otra parte para realizar un tratamiento numérico del problema, Beutler et al. (1986) describen el modelo de presión de radiación solar como:

$$\vec{a} = k(-p_0\vec{e}_0 + p_2\vec{e}_2)$$

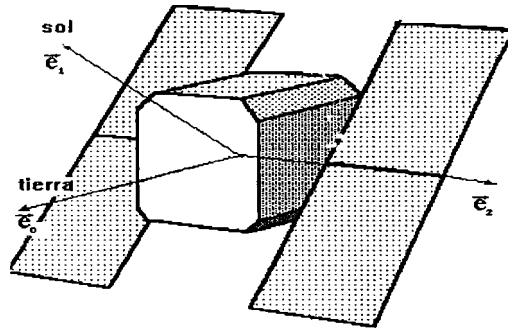


Figura 1

### *Mejoramiento en el ajuste orbital...*

donde:

$\vec{e}_0$  : vector unitario al sol

$\vec{e}_1$  : vector unitario en la dirección del eje de las antenas

$\vec{e}_2$  : vector unitario en la dirección del eje de los paneles

$p_0$  : magnitud en la dirección del sol

$p_2$  : magnitud en la dirección del eje de los paneles solares

Los valores definitivos de  $p_0$  y  $p_2$  deben ser determinados por un proceso de mejoramiento orbital, usando observaciones de GPS durante varios días. Es decir, Beutler propone un análisis determinista del efecto de la PRS, considerando constantes los parámetros del modelo, aunque sus valores definitivos son incógnitas en el ajuste orbital.

Este tratamiento tiene la ventaja de emplear poco tiempo computacional ya que puede evaluarse rápidamente en cada paso de integración orbital. Para los coeficientes  $p_0$  y  $p_2$  se adoptan valores teóricos a priori:

$p_0 = 10^{-7} \text{ m/s}^2$  y  $p_2 = 0 \text{ m/s}^2$  y se determinan correcciones  $\Delta p_0$  y  $\Delta p_2$  mediante el proceso de mejoramiento orbital ya descrito.

### **2.2. Prueba del modelo numérico**

Con la intención de mostrar la importancia de la presión de radiación solar en el modelo de fuerzas estudiamos el comportamiento de los residuos sobre cada una de las componentes (radial, normal y tangencial) a lo largo del período de integración de 96 horas (arbitrariamente elegimos el satélite PRN3). La Fig. 2 muestra lo que ocurre cuando no se incluye la P.R.S. en el modelo de fuerzas; vemos que la componente tangencial lleva la parte mas significativa de tal efecto, es decir es la que tiene mayor amplitud. Observamos también un período de 12 horas en las variaciones de los residuos el cual coincide con la revolución orbital del satélite. Finalmente tenemos que la componente normal no promedia en cero, es decir su valor medio se encuentra desplazado hacia un valor negativo.

Comparando la Fig. 2 con lo obtenido teniendo en cuenta en el modelo de fuerzas de la P.R.S. sólo el término en  $\vec{e}_0$ , es decir en  $\vec{a} = p_0 \vec{e}_0$  (Fig. 3), observamos que la amplitud para la componente radial y tangencial disminuyen notablemente, si bien para esta última aparece una fuerte componente de baja frecuencia, mientras que para

la normal aparece un desplazamiento en valor medio, es decir que con esta corrección, al igual que en otras componentes, la normal promedia en cero. Si el programa de integración trabaja ahora con ocho parámetros libres  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ ,  $\Delta \dot{x}$ ,  $\Delta \dot{y}$ ,  $\Delta \dot{z}$ ,  $p_0$  y  $p_2$  (Fig. 4), las amplitudes en las componentes radial y tangencial disminuyen notablemente.

El ajuste final fue hecho para cuatro días con un error medio cuadrático de 1,78 metros y las máximas diferencias son menores que cinco metros. El programa converge rápidamente con solo tres iteraciones. Los valores obtenidos de los coeficientes del modelo de presión son:

$$p_0 = 0,821 \cdot 10^{-7} \pm 0,002 \cdot 10^{-7} \frac{m}{s^2}$$
$$p_2 = -0,640 \cdot 10^{-9} \pm 0,001 \cdot 10^{-9} \frac{m}{s^2}$$

Se observa de los resultados obtenidos que a pesar que el comportamiento de los residuos mejora notablemente siguen aún *correlacionados*; es decir el modelo no es lo suficientemente bueno. En los residuos aparece sumado, al ruido observación, una señal.

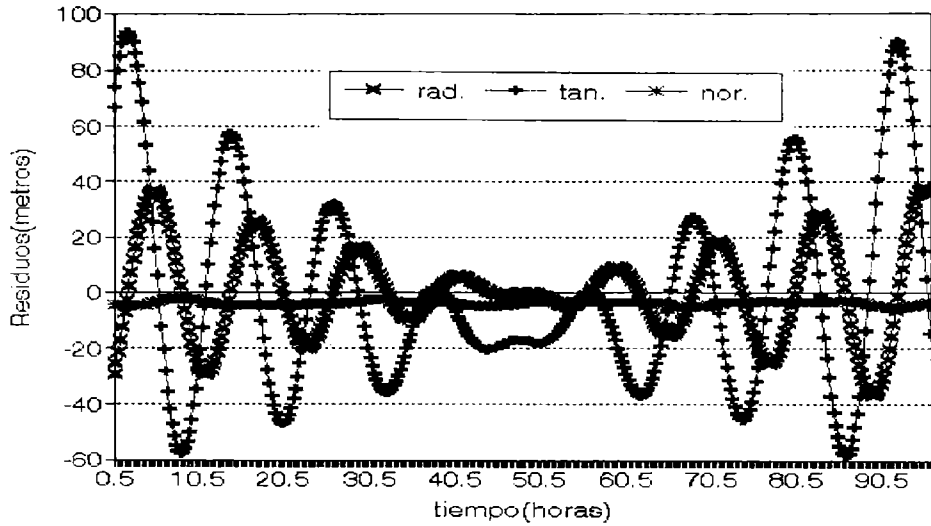
### 3. MODELO ANALITICO

#### 3.1. Análisis geométrico de la presión de radiación solar (P.R.S.)

Debemos abordar el problema de otra manera y es por ello que analizaremos más en detalle el efecto P.R.S.; estudiaremos su modelo físico para poder aplicar un método estadístico sobre el problema. Existe un efecto directo de la radiación solar sobre el satélite. Esta aceleración neta resultante es producto de la interacción (por absorción, reflexión y difusión) de la luz solar con cada elemento de la superficie de la nave, debido a que cada fotón lleva una cantidad de momento (energía dividida por la velocidad de la luz) que puede recombinarse durante la interacción con la superficie de un sólido.

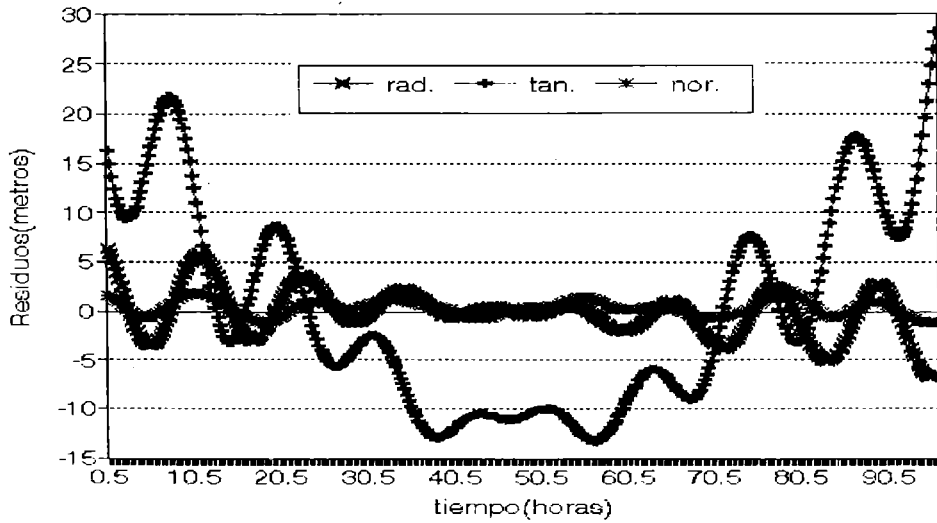
Se llama a cada elemento pequeño de la superficie del satélite  $dA$  y a la fracción de la luz incidente que es absorbida, reflejada y difundida  $\alpha$ ,  $\sigma$ ,  $\delta$ , respectivamente.

*Mejoramiento en el ajuste orbital...*



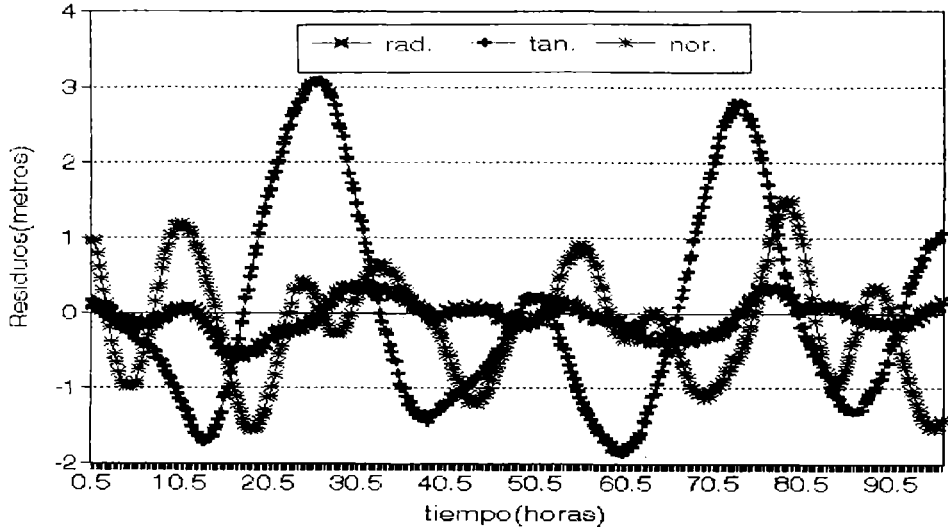
**Comportamiento de los residuos en la dirección R,T,N cuando en el modelo de fuerza no se incluye el efecto de PRS**

Figura 2



**Comportamiento de los residuos cuando solo se tiene en cuenta  $\vec{a}_0 = -p_0 \vec{e}_0$**

Figura3



Comportamiento de los residuos, cuando en el modelo de fuerzas se incluye el modelo completo de Beutler (los dos parámetros)

Figura 4

Se considera que:

- La luz absorbida no es remitida.
- Para una dirección dada  $\vec{n}$ , la luz difundida es proporcional al coseno del ángulo  $\xi$  formado entre  $\vec{n}$  y  $d\vec{A}$  (versor normal al pequeño elemento de superficie  $dA$ ).
- La reflexión es especular.
- La superficie actúa como una combinación lineal de cuerpo negro, espejo perfecto y difusor Lambert.

Finalmente tenemos (A. Milani, A. M. Nobili y P. Farinella; 1987):

$$F_{\alpha} = - \frac{k\phi}{c} \int_{A_{eff}} \alpha \cos \xi \bar{e}_0 d\bar{A}$$

$$\bar{F}_{\sigma} = - \frac{k\phi}{c} \int_{A_{eff}} 2 \sigma \cos^2 \xi \bar{n} d\bar{A}$$

$$\bar{F}_{\delta} = - \frac{k\phi}{c} \int_{A_{eff}} (\delta \cos \xi \bar{e}_0 + \frac{2}{3} \delta \cos \xi \bar{n}) d\bar{A}$$

### Mejoramiento en el ajuste orbital...

Donde  $k$  es el factor de elipse ( $0 < k < 1$ ), el flujo solar y  $\vec{e}_0$  el versor que apunta al solar. Como se puede ver para la integración debe tenerse en cuenta cada pequeño elemento de superficie  $dA$  y su relación con la dirección de radiación solar en cada momento. Para ello la superficie del satélite debe ser subdividida en superficies planas y cilíndricas; la integración se realizará sobre cada superficie iluminada y finalmente la suma de todas dará la integral sobre el área efectiva de la nave.

La expresión final en forma diferencial es (Milani et.al, 1987):

$$d\vec{F} = k\phi \left( -(1 - \sigma) \vec{e}_0 + 2(\delta / 3 + \sigma \cos \xi) \vec{n} \right) |\cos \xi| dA \quad (I)$$

En nuestro modelo, dividamos al satélite en ocho zonas (que definiremos mas adelante). Para simplificar el análisis hablaremos de dos modelos:

- En el primero consideramos que el satélite toma la dirección ideal, es decir, los paneles constantemente están dirigidos al sol, las antenas apuntan hacia la tierra y el resto de la nave se mueve sólidamente a las antenas y al eje de los paneles.

- En el segundo tenemos en cuenta el desalineamiento del eje de los paneles.

Para describir el modelo de presión solar es necesario comprender la orientación de las superficies de la nave con respecto al sol. El sistema de coordenadas de la nave se define como sigue (Fig. 5): El eje  $\vec{e}_1$  ( $-R$ ) de la nave es positivo a lo largo de las antenas, y por lo tanto dirigida nominalmente hacia el centro de la tierra y el eje  $\vec{e}_2$  a lo largo del eje de los paneles.

Existe una rotación o spin alrededor del eje  $\vec{e}_1$  y un mecanismo electromecánico es usado para que el eje  $\vec{e}_2$  apunte hacia el sol; el movimiento con el que los motores rotan a los paneles alrededor del eje  $\vec{e}_0$  está rigido de manera tal que los paneles presenten la máxima superficie al sol. Los sensores solares son los encargados del alineamiento de los paneles, y se encuentran ubicados en sus extremos. Uno se usa para activar el control mientras que el otro se utiliza para monitoreo.

### 3.2. Modelo simplificado del efecto de P.R.S.

Análisis de las áreas en la que dividimos al satélite y su orientación:

$A_1$  área de los paneles dirigida al sol,  $\vec{e}_0$ .

$A_2$  área del cuerpo central del satélite en dirección a la tierra, área de las antenas,  $\vec{e}_1$ .

$A_3$  área opuesta a  $A_2$ ,  $-\vec{e}_1$ .

Áreas laterales del cuerpo central:

$a_2$  en la dirección  $\vec{e}_2$

$a_1$  en la dirección  $-\vec{e}_2$



$a_1$  en la dirección  $\vec{e}_3$   
 $a_1$  en la dirección  $-\vec{e}_3$

$A_4$  área opuesta a los paneles solares,  $\vec{e}_0$  (no interviene en el modelo de fuerzas).

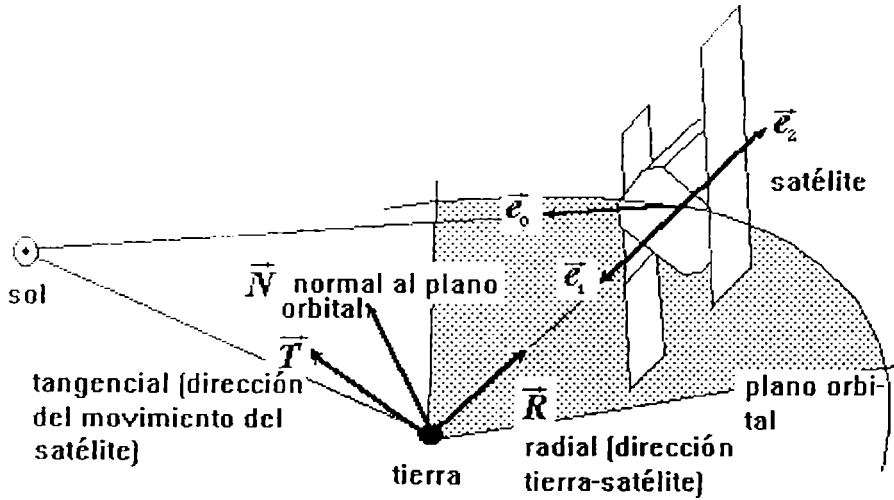


Figura 5

Para el desarrollo analítico que sigue resulta conveniente introducir un punto origen como muestra la Fig. 6, a partir del cual podemos medir el ángulo ( $f t$ ) que describe la posición del satélite en su órbita. Dicho origen queda definido por el punto "O" donde el plano que contiene al Sol y a la Tierra y es normal a la órbita del satélite corta al plano orbital. Notemos que a los efectos del presente análisis utilizamos elemento orbitales medios para el período considerado.

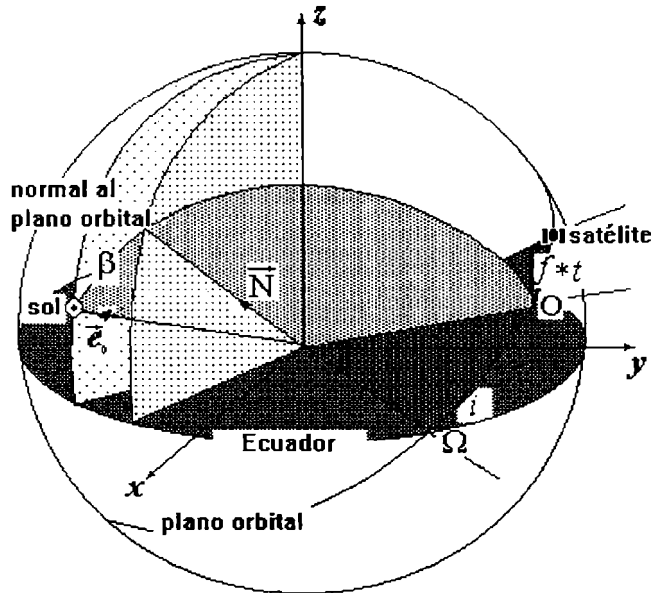


Figura 6

podemos expresar al vector  $\vec{e}_0$  en el sistema gaussiano como sigue:

$$-\vec{e}_0 = \cos\beta$$

$$-\vec{e}_0 = -\text{sen}\beta \cos ft$$

$$-\vec{e}_0 = \text{sen}\beta \text{sen} ft$$

con  $f = \frac{\pi}{6 hs}$  y  $ft$  medido a partir del nodo ascendente.

En base a la abstracción realizada sobre la forma del satélite encontramos que las expresiones de las normales a sus caras laterales con las siguientes:

$$\vec{e}_2 = (\vec{R} * \vec{R} * \vec{e}_0) \left| \vec{R} * (\vec{R} * \vec{e}_0) \right|^{-1}$$

$$\vec{e}_3 = (-\vec{R} * \vec{e}_0) - \left| -\vec{R} * \vec{e}_0 \right|^{-1}$$

Reemplazando valores (Meza et al., Practica de la Especialidad, 1994):

$$\vec{e}_2 = (-\cos\beta \vec{N} - \text{sen}\beta \text{sen} ft \vec{T}) (1 - \text{sen}\beta^2 \cos^2 ft)^{-1/2}$$

$$\vec{e}_3 = (\text{sen}\beta \text{sen} ft \vec{N} - \cos\beta \vec{T}) (1 - \text{sen}\beta^2 \cos^2 ft)^{-1/2}$$

De la expresión diferencial de la fuerza debido al efecto de la radiación solar (ecuación Y), hacemos la siguiente aproximación: en vez de una área diferencial  $dA$ , tomamos áreas finitas  $\Delta A_i$ , que constituyen, cada una, las superficies en las que dividimos al satélite; es decir en vez de una integración de los efectos producidos sobre los diferenciales de área, realizamos una suma sobre las zonas de la nave.

Con estas simplificaciones encontramos las expresiones de la fuerza, debida a la P.R.S. sobre la nave. Para todo este procedimiento debemos establecer previamente el sistema de referencia empleado; en esta parte del trabajo es conveniente utilizar el sistema Gaussiano ya que podemos visualizar mejor la geometría del problema.

Teniendo en cuenta lo mencionado anteriormente las expresiones finales de la fuerza en cada una de sus componentes nos queda de la siguiente forma (Meza et al., Práctica de la Especialidad, 1994):

$$F_N = \frac{\phi}{c} (C_{N0} + C_{N1} \cos ft + C_{N2} \cos 2ft + C_{N4} \cos 4ft + \dots)$$

$$F_R = \frac{\phi}{c} (C_{R1} \cos ft + C_{R2} \cos 2ft + C_{R3} \cos 3ft + \dots)$$

$$F_T = \frac{\phi}{c} (S_{T1} \text{sen} ft + S_{T2} \text{sen} 2ft + S_{T3} \text{sen} 3ft + S_{T5} \text{sen} 5ft + \dots)$$

Donde los coeficientes dependen del área efectiva, los coeficientes de reflexión, absorción y difusión, el ángulo que forman la normal al plano orbital y la dirección al sol ( $\beta$ ).

### 3.3. Modelo general del efecto de P.R.S.

De acuerdo al diseño, los paneles estarían siempre perfectamente normales a la línea que une al satélite con el sol. Estas condiciones pueden ser violadas por tres razones: los dos ejes de los paneles solares no yacen en una perfecta línea recta, los

### Mejoramiento en el ajuste orbital...

sensores no se encuentran perfectamente normales al eje de los paneles y la existencia de desarreglos en el satélite que desvían la actitud de control. En la práctica sin embargo los 3 desalineamientos se reducen a una variación angular que no es superior a 0.02 radianes en torno al eje radial.

Es decir, podemos considerar que cada dirección normal a las áreas, en las que dividimos la nave, está rotada con respecto a su posición ideal, un ángulo en la dirección radial:

$$M_R(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \varphi & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

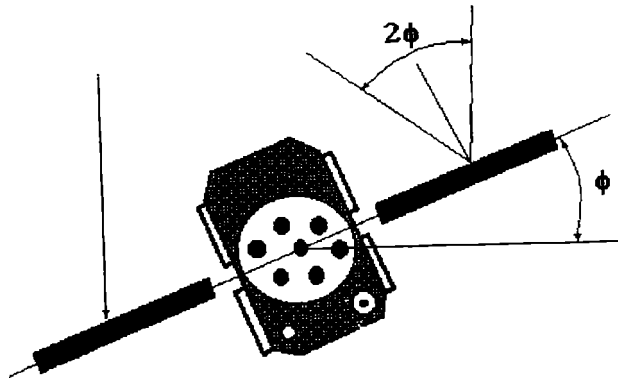


Figura 7

La expresión final de la fuerza ejercida sobre el satélite debido a la P.R.S., toma la siguiente forma (Meza et. al, Practica de la Especialidad):

$$F_N = \frac{\phi}{c}(C_{N0} + C_{N1} \cos ft + C_{N2} \cos 2ft + \dots) + \varphi \frac{\phi}{c}(S_{N1} \sin ft + C_{N0} + C_{N1} \cos ft + S_{N3} \sin 3ft + \dots)$$

$$F_R = \frac{\phi}{c} (C_{R1} \cos ft + C_{R2} \cos 2ft + \dots) + \varphi \frac{\phi}{c} (C_{R1} \cos ft + \dots)$$

$$F_T = \frac{\phi}{c} (S_{T1} \sin ft + S_{T2} \sin 2ft + S_{T3} \sin 3ft + \dots) + \varphi \frac{\phi}{c} (C_{T0} + S_{T1} \sin ft + C_{T2} \cos 2ft + S_{T3} \sin 3ft + \dots)$$

Donde los coeficientes dependen del área, los coeficientes de reflexión, difusión y absorción y el ángulo  $\beta$ ; como vemos la fuerza está en función directa del valor  $\Phi$  de (flujo solar).

### 3.4. Efecto de la P.R.S. sobre las coordenadas en un sistema inercial

Hemos hablado del modelado físico de la aceleración producida por la P.R.S. sobre la nave. Para obtener las expresiones de la variación de las coordenadas debido a dicha fuerza debemos integrar dos veces la aceleración modelada, en un sistema inercial. Por comodidad las fuerzas están expresadas en un sistema con origen en la nave (sist. Gaussiano) por lo tanto no inercial. Para pasar a un sistema inercial optamos por hacer una rotación sobre el plano orbital a un punto fijo, "punto origen" definido anteriormente. Es decir debemos realizar una rotación alrededor del eje normal al plano orbital. Es conveniente aclarar que consideramos constante a la normal al plano orbital, esta aproximación es válida para el tiempo de integración que utilizamos en este ajuste (aproximadamente 4 días).

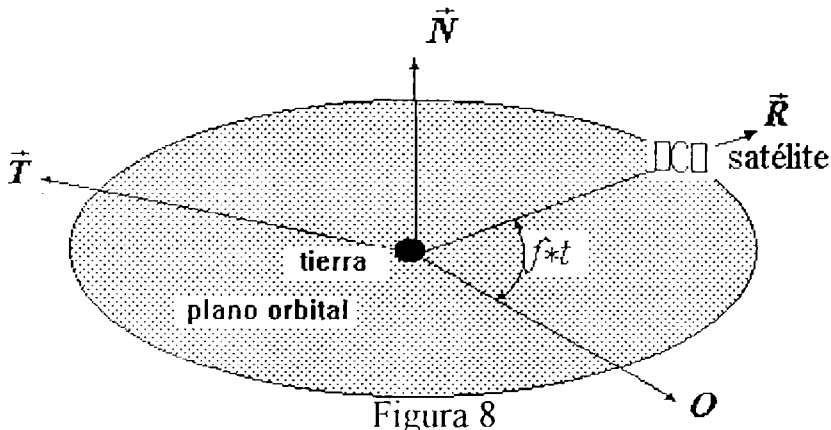


Figura 8

### Mejoramiento en el ajuste orbital...

X - Y - Z sistema inercial

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos ft & \operatorname{sen} ft & 0 \\ -\operatorname{sen} ft & \cos ft & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_R \\ F_T \\ F_N \end{pmatrix}$$
$$F_x = F_R \cos ft + F_T \operatorname{sen} ft$$

Reemplazando e integrando:

$$X = \frac{\Phi}{c} (X_0^2 t + X_1 t + X_2 + X_3 \cos ft + X_4 \cos 2ft + X_5 \cos 3ft + \dots)$$
$$F_y = -F_R \operatorname{sen} ft + F_T \cos ft$$

Reemplazando e integrando:

$$Y = \frac{\Phi}{c} (Y_1 t + Y_2 + Y_3 \operatorname{sen} 2ft + Y_5 \operatorname{sen} 3ft + \dots)$$
$$F_z = F_N$$

Reemplazando e integrando:

$$Z = \frac{\Phi}{c} (Z_0 t^2 + Z_1 t + Z_2 + Z_3 \cos ft + Z_4 \cos 2ft + \dots)$$

Donde  $X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1$  y  $Z_2$  son constante de integración; sus valores dependen de las condiciones iniciales.

#### 3.4.1. Comparación del modelo propuesto con datos externos

Ya se han integrado las fuerzas en un sistema inercial obteniendo una expresión para las coordenadas; por una rotación similar a la anterior podremos pasar

nuevamente a un sistema gaussiano en el que se describe mejor la geometría del problema.

$$\begin{pmatrix} R \\ T \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos f t & -\operatorname{sen} f t & 0 \\ \operatorname{sen} f t & \cos f t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

Finalmente quedan las siguientes expresiones de las coordenadas en el sistema solidario con la nave:

$$\begin{aligned} R &= R_0^C \cos f t + R_1^S \operatorname{sen} f t + R_2^C \cos 2f t + R_3^C \cos 3f t + \dots + T.M. \\ T &= T_0^C \cos f t + T_1^S \operatorname{sen} f t + T_2^S \operatorname{sen} 2f t + T_3^S \operatorname{sen} 3f t + \dots + T.M \\ N &= N_0^C + N_1^C \cos f t + N_2^C \cos 2f t + \dots + T.M \end{aligned}$$

Donde T.M. denota los términos en los que el coeficiente que acompaña a la componente periódica varía lineal o cuadráticamente con el tiempo (términos mixtos) y T.S. denota los términos que varían lineal y cuadráticamente con el tiempo.

Una manera de corroborar estas expresiones analíticas con las observaciones es a través del análisis de los residuos (diferencias entre los  $(x, y, z)$  observados y los  $(x, y, z)$  calculados en el ajuste). Para que estos residuos representen el efecto de P.R.S., que está presente en los valores observados, obtenemos los valores calculados integrando solamente los efectos gravitacionales terrestre y lunisolar. Estimamos que los efectos de las fuerzas menores (mareas, albedo, etc) son despreciables a los fines de esta comparación. Recordemos que en el caso de incluir en la integración un modelo correcto de la P.R.S. los residuos esperables tendrían carácter aleatorio. Analizamos los residuos con la técnica de Power Spectrum y en líneas generales observamos que las frecuencias con máxima potencia espectral corroboran las frecuencias desprendidas del modelo propuesto.

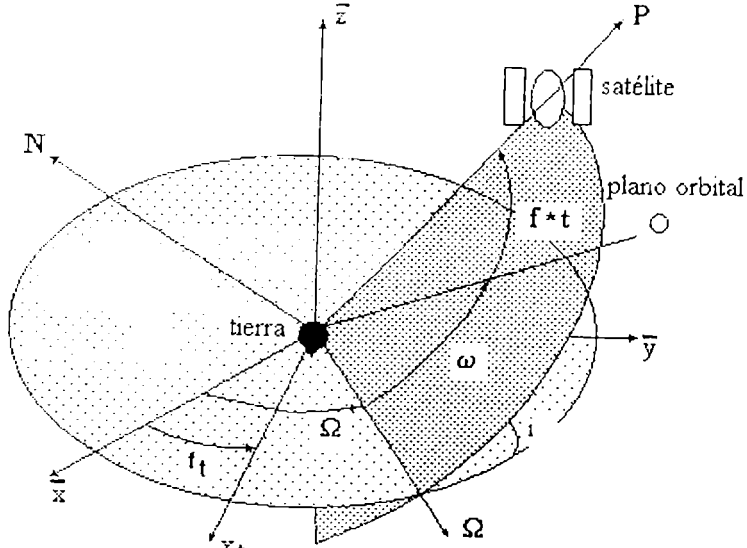
### 3.5. Pasaje de coordenadas al sistema terrestre

Una vez que tenemos las expresiones teóricas de las variaciones de las coordenadas debido al efecto de la P.R.S., en el sistema inercial, debemos

**Mejoramiento en el ajuste orbital...**

pasarlas al sistema en donde se realizan las observaciones, es decir el sistema terrestre.  
 Para esto debemos realizar las siguientes rotaciones (Fig. 6):

$$M = R(f_t - \Omega) R(-i) R(-\omega)$$



$$f_t = \omega_t t = \frac{\pi}{12} t$$

$$f = \frac{\pi}{6} t$$

donde consideramos que  $\gamma$  (inclinación orbital),  $\omega$  (longitud del perihelio) y  $\Omega$  (longitud del nodo) son constantes en el período de integración utilizado.

Finalmente tenemos:

$$\begin{pmatrix} \Delta X_T \\ \Delta Y_T \\ \Delta Z_T \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

Expresiones finales (Meza et al., Practica de la Especialidad, 1994):



$$\Delta X = \frac{\Phi}{c} (X_{i0}^S \text{sen}(f/2) + X_{i0}^C \text{cos}(f/2) + X_{i1}^C t \text{cos}(f/2) + X_{i1}^S \text{sen}(f/2) + X_{i2}^C t^2 \text{cos}(f/2) + X_{i2}^S t^2 \text{sen}(f/2) + X_{i3}^S \text{sen}(3f/2) + X_{i3}^C \text{cos}(3f/2) + X_{i4}^S \text{sen}(5f/2) + X_{i4}^C \text{cos}(5f/2) + \dots)$$

$$\Delta Y = \frac{\Phi}{c} (Y_{i0}^S \text{sen}(f/2) + Y_{i0}^C \text{cos}(f/2) + Y_{i1}^C t \text{cos}(f/2) + Y_{i1}^S \text{sen}(f/2) + Y_{i2}^C t^2 \text{cos}(f/2) + Y_{i2}^S t^2 \text{sen}(f/2) + Y_{i3}^S \text{sen}(3f/2) + Y_{i3}^C \text{cos}(3f/2) + Y_{i4}^S \text{sen}(5f/2) + Y_{i4}^C \text{cos}(5f/2) + \dots)$$

$$\Delta Z = \frac{\Phi}{c} (Z_{i0}^S \text{sen}(f) + Z_{i2} t^2 + Z_{i2} t + Z_{i3} + \dots)$$

Donde los coeficientes de los términos precedentes dependen de los valores conocidos  $\omega, \Omega, i, \beta$  (ángulo formado entre la normal al plano orbital y la dirección del sol), de los coeficientes de reflectividad y de difusión y el área efectiva (estimados por la NASA). Finalmente hemos obtenido las expresiones de la variación de las coordenadas del satélite, debido al efecto de P.R.S., en el sistema terrestre.

## 4. ANALISIS Y CONCLUSIONES

### 4.1. Comparación del modelo propuesto con el modelo de Beutler

Del análisis realizado sobre el modelo numérico de Beutler se deduce que las expresiones de la aceleración producido por la P.R.S. en sus dos componentes  $p_0$  y  $p_2$  en el sistema gaussiano son las siguientes:

$e_0$  :

$$p_{0N} = \cos \beta$$

$$p_{0R} = \text{sen} \beta \cos ft$$

$$p_{0T} = -\text{sen} \beta \text{sen} ft$$

*Mejoramiento en el ajuste orbital...*

$e_2$  :

$$p_{2N} = p_{2N1} \text{sen } ft + p_{2N3} \text{sen } 3ft + p_{2N5} \text{sen } 5ft + \dots$$

$$p_{2R} = 0$$

$$p_{2T} = p_{2T0} + p_{2T2} \text{cos } 2ft + p_{2T4} \text{cos } 4ft + \dots$$

Si comparamos estas expresiones con las expresiones de la aceleración (debido al efecto de P.R.S.) obtenidas en nuestros modelos, notamos que los términos principales del modelo extraído en la primera etapa contienen los términos de Beutler para  $\vec{p}_0$ ; mientras que el modelo de la segunda etapa además de contener los términos de Beutler para  $\vec{p}_2$  muestra términos cruzados en coseno y seno (para la componente normal y tangencial respectivamente) y términos en coseno para la componente radial, los términos no presentes en el modelo de Beutler son pequeños lo que justifica el buen funcionamiento de este modelo. Sin embargo el modelo propuesto es mas completo y contiene una descripción mas elaborada de la física del problema. Hablando con valores reales, tenemos en la tabla siguiente los ordenes de magnitud de los coeficientes que aparecerían en el desarrollo periódico del efecto, calculado analíticamente:

Sólo la componente  $\vec{p}_0$

<b>términos</b>	<b>comp. normal</b>	<b>comp. radial</b>	<b>comp. tangencial</b>
<i>term. indep.</i>	3,020117	-0,62587	0
<i>cos(ft)</i>	0,149767	-4,64385	0
<i>sen(ft)</i>	0	0	5,260699
<i>cos(2ft)</i>	0,105706	-0,62587	0
<i>sen(2ft)</i>	0	0	0,132762
<i>cos(3ft)</i>	0	0,037809	0
<i>sen(3ft)</i>	0	0	0,099187
<i>cos(4ft)</i>	0,008992	0	0
<i>sen(4ft)</i>	0	0	0
<i>cos(5ft)</i>	0	0,004699	0

### 4.3. Prospectiva

Al principio hablamos de un ajuste orbital, de las condiciones iniciales (coordenadas y velocidades) y de los parámetros del modelo de Beutler ( $p_0$  y  $p_2$ ), mediante mínimos cuadrados. Allí el modelo de presión de radiación solar era un modelo determinista con parámetros a ajustar. Si bien la amplitud de los residuos disminuye notablemente, después de aplicar el modelo completo de Beutler, no presentan un comportamiento aleatorio sino, por el contrario, aparecen fuertemente correlacionados.

Una vez que tenemos las expresiones del efecto en cada componente (como se encontraron en un ítem anterior) podemos hacer un tratamiento estadístico del problema. Este tratamiento consiste en aplicar el método de colocación por mínimos cuadrados, en el que básicamente se incorpora la información estadística de la señal no modelada, en la matriz de varianza - covarianza a priori que aparece en el ajuste por mínimos cuadrados, dicha matriz se puede calcular con la serie encontrada analíticamente. Analizar, estudiar y aplicar este método en el problema de ajuste orbital es la prospectiva de este trabajo.

Con este método esperamos mejorar la estimación de las incógnitas, especialmente los parámetros del modelo numérico, y garantizar por el estudio de los residuos, el análisis estadístico de la señal de la P.R.S. (no modelable en forma determinista). Además podremos posibilitar el estudio de las fuerzas menores, hoy encubiertas por la P.R.S. que presentan importante información geofísica.

### REFERENCIAS

- Markus Bath , 1974. Spectral Analysis in Geophysics, Amsterdam - Oxford - New York.
- H. Moritz , 1980. Advanced Physical Geodesy, Abacus Press Tunbridge Wells Kent.
- H. F. Fliegel, W. A. Fees, W. C. Layton, N. W. Rhodus , 1985. The G.P.S. Radiation Force Modelin proceedings of the First International Symposium on Precise Positioning with the Global Positioning System, Rockville, Maryland. volumen I: pag.:113-119.
- G. Beutler, W. Gurtner, M. Rochacher, T. Schildknecht, Y. Bauerisima, 1986. Determination of GPS Orbits using Double Difference Carrier Phase Observations from Regional Networks. Proceed. of the Fourth Int. Geodetic Symp. on Satellite Positioning, Austin, Texas.
- A. Milani, A. M. Nobili, P. Farinella, 1987. Non - Gravitational Perturbations and Satellite Geodesy, Adam Hilger, Bristol.
- H. F. Fliegel, T. E. Gallini , 1989. Radiation Pressure Models for Block-II G.P.S. Satellites in Proceedings 5th of International Geodetic Symposium on Satellite Positioning, Corbett Center. volumen II. pag: 789-798.

### *Mejoramiento en el ajuste orbital...*

- J. Feltens , 1990. The influence of Non-Gravitational Forces on G.P.S.-Satellite Orbits Cahiers du Centre Europeen de Geodynamique et de Seismologie, Luxembourg. volumen II. pag.: 27-37.
- A. Leick , 1994. 2da Edición.. G.P.S. Satellite Surveying, John Wiley & Sons.
- R. Perdomo y D. del Cogliano, 1991. Generación de efemérides Satelitarias, Memorias del Congreso de Ciencias de la Tierra, Santiago.
- B. Hofmann - Wellenhof, H. Lichtenegger and J. Collins , 1992. Global Positioning System , Theory and Practice, Spinger-Verlag Wien New York.
- A. Meza, C. Brunini, J.C. Usandivaras, 1994. Modelo geométrico de la P.R.S., presión de Radiación solar sobre satélites GPS, Práctica de la especialidad, Facultad de Cs. Astronómicas y Geofísicas - La Plata - Argentina.